第48卷第5期 数 学 学 报 Vol.48, No.5
2005年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA Sept., 2005

文章编号: 0583-1431(2005)05-0879-10 **文献标识码: A**

广义集值强非线性混合似变分不等式解的迭代逼近

曾六川

上海师范大学数学系 上海 200234
E-mail: zenglc@hotmail.com

摘 要 辅助原理的技巧被延拓来研究一类取非紧值的集值映象的广义强非线性混合似变分不等式. 首先, 证明了这类广义强非线性混合似变分不等式的辅助问题解的存在性. 其次, 利用该存在性结果, 给出了解这类广义强非线性混合似变分不等式的迭代算法. 最后, 不仅证明了这类广义强非线性混合似变分不等式解的存在性, 而且证明了由算法生成的迭代序列的收敛性.

关键词 迭代算法; 集值映象; 存在性; 收敛性
MR(2000) 主题分类 49J40, 47H04, 47H19
中图分类 O177.91

Iterative Approximation of Solutions to Generalized Set-Valued Strongly Nonlinear Mixed Variational-Like Inequalities

Lu Chuan ZENG

Department of Mathematics, Shanghai Normal University, Shanghai 200234*, P. R. China*
E-mail: zenglc@hotmail.com

Abstract The auxiliary principle technique is extended to study a class of generalized strongly nonlinear mixed variational-like inequalities for set-valued mappings without compact values. Firstly, the existence of solutions to the auxiliary problems for this class of generalized strongly nonlinear mixed variational-like inequalities is shown. Secondly, the iterative algorithm for solving this class of generalized strongly nonlinear mixed variational-like inequalities is given by using this existence result. Finally, not only the existence of solutions of this class of generalized strongly nonlinear mixed variational-like inequalities is shown, but also the convergence of iterative sequences generated by the algorithm is proven.

Keywords Iterative algorithm; Set-valued mapping; Existence; Convergence
MR(2000) Subject Classification 49J40, 47H04, 47H19
Chinese Library Classification O177.91

1 引言及预备

设 H 是一实 Hilbert 空间, 其范数与内积分别记成 $\|\cdot\|$ 与 $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $CB(H)$ 是 H 的所有非空

收稿日期: 2003-09-29; 接受日期: 2004-07-15
基金项目: 国家教育部高等学校优秀青年教师教学和科研奖励基金; 上海市教委重点学科经费 (部分) 资助项目; 上海市曙光计划基金资助项目

有界闭子集之族. 对给定的单值映象 $N,\eta: H\times H\to H$ 与集值映象 $T,A:H\to CB(H)$, 考虑下列问题：寻找 $u\in H$, $w\in T(u)$ 及 $y\in A(u)$, 使得

$$\langle N(w,y),\eta(v,u)\rangle + b(u,v)-b(u,u)\geq 0,\quad \forall v\in H, \tag{1.1}$$

其中, $b(\cdot,\cdot): H\times H\to R$ 是不可微函数, 且满足下列性质：

(i) $b(\cdot,\cdot)$ 关于第一变量是线性的;

(ii) $b(\cdot,\cdot)$ 是有界的, 即存在常数 $\gamma>0$, 使得 $b(u,v)\leq\gamma\|u\|\,\|v\|$, $\forall u,v\in H$;

(iii) $b(u,v)-b(u,w)\leq b(u,v-w)$, $\forall u,v,w\in H$;

(iv) $b(\cdot,\cdot)$ 关于第二变量是凸的.

注 1[1] (1) 对任意 $u,v\in H$, 由性质 (i) 推得 $-b(u,v)=b(-u,v)$; 由性质 (ii) 推得 $b(-u,v)\leq\gamma\|u\|\,\|v\|$, 故有 $|b(u,v)|\leq\gamma\|u\|\,\|v\|$, $\forall u,v\in H$, 且 $b(u,0)=b(0,v)=0$, $\forall u,v\in H$.

(2) 由性质 (ii) 与 (iii) 可得, 对一切 $u,v,w\in H$, $b(u,v)-b(u,w)\leq\gamma\|u\|\,\|v-w\|$, 且 $b(u,w)-b(u,v)\leq\gamma\|u\|\,\|w-v\|$. 因此 $|b(u,v)-b(u,w)|\leq\gamma\|u\|\,\|v-w\|$, $\forall u,v,w\in H$.

据此得知 $b(\cdot,\cdot)$ 关于第二变量是连续的.

特例 (a) 如果 $\eta(v,u)=g(v)-g(u)$, 其中 $g:H\to H$, 且 $b(u,v)=f(v)$, $\forall u,v\in H$. 这里, $f:H\to R$, 则问题 (1.1) 等价于下列问题: 寻找 $u\in H$, $w\in T(u)$ 及 $y\in A(u)$, 使得

$$\langle N(w,y),g(v)-g(u)\rangle + f(v)-f(u)\geq 0,\quad \forall v\in H. \tag{1.2}$$

问题 (1.2) 称为广义集值强非线性隐变分不等式. 它已由 Huang 等人 [2] 考虑并研究过.

(b) 如果 $\eta(v,u)=v-u$, 则问题 (1.1) 等价于下列问题: 寻找 $u\in H$, $w\in T(u)$ 及 $y\in A(u)$, 使得

$$\langle N(w,y),v-u\rangle + b(u,v)-b(u,u)\geq 0,\quad \forall v\in H. \tag{1.3}$$

问题 (1.3) 称为广义集值强非线性混合变分不等式.

(c) 如果 $b(u,v)=0$, 则问题 (1.1) 等价于下列问题: 寻找 $u\in H$, $w\in T(u)$ 及 $y\in A(u)$, 使得

$$\langle N(w,y),\eta(v,u)\rangle\geq 0,\quad \forall v\in H. \tag{1.4}$$

问题 (1.4) 称为广义似变分不等式. Noor [3] 已考虑和研究过它. 文 [4] 已证明, 源于结构分析的非凸、非单调、多值的问题可依据广义似变分不等式 (1.4) 来表述. Parida 与 Sen [5], Tian [6], Yao [7,8] 及 Cubiotti [9] 已证明, 许多源于最优化和经济学的问题也可依据 (1.4) 型的广义变分不等式来研究.

总之, 只要适当地选取映象 N,η,T,A 及函数 b, 若干熟知的变分不等式类与似变分不等式类皆可当作问题 (1.1) 的特例而得到.

问题 (1.1) 称为广义集值强非线性混合似变分不等式. 在假设 T 与 A 是取紧值的集值映象下, Noor [10] 首次引入并研究过它. 后来, 在假设 T 与 A 是取有界闭值的集值映象下, Huang 与 Deng [1] 又考虑并研究了它.

1997 年, Noor [10] 把 (Glowinski 等人 [11] 率先提出的) 辅助原理的技巧延拓来研究问题 (1.1) 的解的存在唯一性, 其中 T 与 A 是取紧值的集值映象. 令人遗憾的是, 文 [10] 中定理 3.1 的唯一性部分的证明是错的. 而且, 存在性部分的证明是基于了假设辅助问题有解, 但他却未证明该辅助问题解的存在性. 随后, Huang 与 Deng [1] 也把辅助原理的技巧延拓来研究问题 (1.1) 的解的

存在唯一性, 其中 T 与 A 是取有界闭值的集值映象. 不过, 值得指出的是, 在他们的主要结果定理 4.1[1] 中, 映象 T 实际上是单值映象. 事实上, Liu 与 Li [12] 已证明了下列定理:

定理 L-L (文 [12, 定理 3.1]) 设算子 $N(\cdot,\cdot)$ 关于第一变量是 Lipschitz 连续的, 具常数 $\beta>0$; T 是 H-Lipschitz 连续的, 具常数 $\mu>0$, 且关于算子 $N(\cdot,\cdot)$ 的第一变量是单调的. 若对每个固定的 $u\in H$, $\operatorname{int} D(N(T(\cdot),u))\neq\emptyset$, 则 $N(T(\cdot),u)$ 在 $\operatorname{int} D(N(T(\cdot),u))$ 上不能是多值算子.

本文仍把辅助原理的技巧延拓来研究取非紧值的集值映象的广义强非线性混合似变分不等式 (1.1). 证明了问题 (1.1) 的辅助问题解的存在性, 利用该存在性结果构造了用于解问题 (1.1) 的迭代算法, 还证明了问题 (1.1) 的解的存在性和由算法生成的迭代序列的收敛性. 本文结果在下列方面改进与修正了 Huang 与 Deng 的主要结果 [1]: (i) 关于问题 (1.1) 的 Huang 与 Deng 的辅助问题是关于问题 (1.1) 的本文的辅助问题的特例; (ii) 就迭代算法而言, 本文的收敛判据迥异于 Huang 与 Deng 的收敛判据; (iii) 通过引入强混合单调性的概念, 本文修正了 Huang 与 Deng 原先加在集值映象 T 与单值映象 N 上的限制.

定义 1.1 集值映象 $V:H\to CB(H)$ 称为

(i) Lipschitz 连续的, 如果存在常数 $\gamma>0$, 使得

$$H(V(u),V(v))\le\gamma\|u-v\|,\quad \forall\, u,v\in H,$$

其中 $H(\cdot,\cdot)$ 是 $CB(H)$ 上的 Hausdorff 距离;

(ii) 强单调的, 如果存在常数 $\xi>0$, 使得

$$\langle w_1-w_2,u_1-u_2\rangle\ge\xi\|u_1-u_2\|^2,\quad \forall\, u_1,u_2\in H,\quad w_1\in T(u_1),\quad w_2\in T(u_2).$$

定义 1.2 设 $N:H\times H\to H$ 是一非线性映象, $T,A:H\to CB(H)$ 是集值映象:

(i) T 称为关于 N 的第一变量是强单调的, 如果存在常数 $\zeta>0$, 使得

$$\langle N(w_1,\cdot)-N(w_2,\cdot),u_1-u_2\rangle\ge\zeta\|u_1-u_2\|^2,\quad \forall\, u_1,u_2\in H,\quad w_1\in T(u_1),\quad w_2\in T(u_2);$$

(ii) N 称为关于 T 与 A 是强混合单调的, 如果存在常数 $\alpha>0$, 使得

$$\begin{aligned}&\langle N(w_1,y_1)-N(w_2,y_2),u_1-u_2\rangle\ge\alpha\|u_1-u_2\|^2,\\&\forall\, u_1,u_2\in H,\quad w_1\in T(u_1),\quad w_2\in T(u_2),\quad y_1\in A(u_1),\quad y_2\in A(u_2);\end{aligned}$$

(iii) N 称为关于第一变量是 Lipschitz 连续的, 如果存在常数 $\beta>0$, 使得

$$\|N(u_1,\cdot)-N(u_2,\cdot)\|\le\beta\|u_1-u_2\|,\quad \forall\, u_1,u_2\in H.$$

定义 1.3 映象 $\eta:H\times H\to H$ 称为

(i) 强单调的, 如果存在常数 $\sigma>0$, 使得 $\langle\eta(u,v),u-v\rangle\ge\sigma\|u-v\|^2$, $\forall\, u,v\in H$;

(ii) Lipschitz 连续的, 如果存在常数 $\delta>0$, 使得 $\|\eta(u,v)\|\le\delta\|u-v\|^2$, $\forall\, u,v\in H$.

定义 1.4 设 D 是 H 的非空凸子集, $f:D\to(-\infty,+\infty)$.

(1) f 称为凸函数, 如果对任意 $u,v\in D$ 及任意 $\alpha\in[0,1]$,

$$f(\alpha u+(1-\alpha)v)\le\alpha f(u)+(1-\alpha)f(v);$$

(2) f 称为 D 上的下半连续函数, 如果对每个 $\alpha\in(-\infty,+\infty)$, $\{u\in D:f(u)\le\alpha\}$ 是 D 中的闭集;

(3) f 称为凹函数, 如果 $-f$ 是凸函数;

(4) f 称为 D 上的上半连续函数, 如果 $-f$ 是 D 上的下半连续函数.

本文需要下列假设与结果.

假设 1.1 映象 $N, \eta: H \times H \to H$ 满足下列条件:

(1) 对一切 $w, y \in H$, 存在常数 $\tau > 0$, 使得 $\|N(w,y)\| \le \tau(\|w\| + \|y\|)$;

(2) $\eta(v,u) = -\eta(u,v),\ \forall\, u, v \in H$;

(3) 对给定的 $x, y, u \in H$, 函数 $v \mapsto \langle N(x,y), \eta(u,v)\rangle$ 是凹的且上半连续的.

注 2 (i) 由 (2) 可得 $\eta(u,u) = 0,\ \forall\, u \in H$. (ii) 由 (2) 与 (3) 得知, 对任给的 $x, y, v \in H$, 函数 $u \mapsto \langle N(x,y), \eta(u,v)\rangle$ 是凸的且下半连续的.

引理 1.1[13, 14] 设 X 是 Hausdorff 的线性拓扑空间 E 的非空闭凸子集, $\phi, \psi: X \times X \to R$ 是满足下列条件的函数:

(i) $\psi(x,y) \le \phi(x,y), \forall\, x, y \in X$, 且 $\psi(x,x) \ge 0, \forall\, x \in X$;

(ii) 对每个 $x \in X$, $\phi(x,y)$ 关于 y 是上半连续的;

(iii) 对每个 $y \in X$, $\{x \in X: \psi(x,y) < 0\}$ 是凸集;

(iv) 存在非空紧集 $K \subset X$ 及 $x_0 \in K$, 使得 $\psi(x_0, y) < 0, \forall\, y \in X \backslash K$. 则存在 $\overline{y} \in K$, 使得 $\phi(x, \overline{y}) \ge 0, \forall\, x \in X$.

命题 1.1[15] 设 K 是实 Hilbert 空间 H 的非空凸子集, $f: K \to R$ 是下半连续的凸泛函, 则 f 是弱下半连续的.

注 3 据命题 1.1 即知, 若 $f: K \to R$ 是上半连续的凹泛函, 则 f 是弱上半连续的.

2 辅助问题与算法

本节, 把 Glowinski 等人 [11] 的辅助原理的技巧延拓来研究广义集值强非线性混合似变分不等式 (1.1), 给出了广义集值强非线性混合似变分不等式 (1.1) 的辅助问题解的存在性定理. 利用该存在性定理, 构造了用于解广义集值强非线性混合似变分不等式 (1.1) 的迭代算法.

给定 $u \in H$, $w \in T(u)$ 及 $y \in A(u)$, 考虑下列问题 $P(u,w,y)$: 寻找 $z \in H$, 使得

$$\langle g(z), v - z\rangle \ge \langle g(u), v - z\rangle - \rho\langle N(w,y), \eta(v,z)\rangle + \rho b(u,z) - \rho b(u,v) \ge 0, \quad \forall\, v \in H, \tag{2.1}$$

其中 $g: H \to H$ 是非线性映象, $\rho > 0$ 是常数. 问题 $P(u,w,y)$ 称为广义集值强非线性混合似变分不等式 (1.1) 的辅助问题.

注 4 易见, 若 $g \equiv I$, 其中 I 是 H 上的恒等映象, 则辅助问题 (2.1) 化为 Huang 与 Deng [1] 的辅助问题 (3.1).

定理 2.1 设 $g: H \to H$ 是 Lipschitz 连续的, 具常数 $\zeta > 0$, 又是强单调的, 具常数 $\lambda > 0$; $\eta: H \times H \to H$ 是 Lipschitz 连续的, 具常数 $\delta > 0$; 函数 $b(\cdot,\cdot)$ 满足性质 (i)–(iv). 如果假设 1.1 成立, 则辅助问题 $P(u,w,y)$ 有解.

证明 分别定义函数 $\phi, \psi: H \times H \to R$ 如下

$$\phi(v,z) = \langle g(v), v - z\rangle - \langle g(u), v - z\rangle + \rho\langle N(w,y), \eta(v,z)\rangle - \rho b(u,z) + \rho b(u,v),$$
$$\psi(v,z) = \langle g(z), v - z\rangle - \langle g(u), v - z\rangle + \rho\langle N(w,y), \eta(v,z)\rangle - \rho b(u,z) + \rho b(u,v).$$

往证函数 ϕ, ψ 依弱拓扑满足引理 1.1 的所有条件. 事实上, 易见 ϕ 与 ψ 满足引理 1.1 的条

件 (i). 据 b 的性质 (iv), 注 1 的 (2) 及假设 1.1 的 (3) 即知 $\phi(v,z)$ 关于 z 是弱上半连续的. 又易见, 对每个固定的 $z\in H$, $\{v\in H:\psi(v,z)<0\}$ 是凸集, 故引理 1.1 的条件 (ii) 与 (iii) 成立.

令 $\omega=\lambda^{-1}[\zeta\|u\|+\rho\delta\tau(\|w\|+\|y\|)+\rho\gamma\|u\|]$, $K=\{z\in H:\|z\|\le\omega\}$, 则 K 是 H 的弱紧子集. 对任意固定的 $z\in H\backslash K$, 取 $v_0=0\in K$. 由假设 1.1 的 (1), η 的 Lipschitz 连续性, g 的强单调性与 Lipschitz 连续性及注 1 的 (2), 即有

$$\begin{aligned}\psi(v_0,z)=\psi(0,z)&=-\langle g(z),z\rangle+\langle g(u),z\rangle+\rho\langle N(w,y),\eta(0,z)\rangle+\rho[b(u,0)-\rho b(u,z)]\\&=-\langle g(z)-g(0),z-0\rangle+\langle g(u)-g(0),z\rangle+\rho\langle N(w,y),\eta(0,z)\rangle+\rho[b(u,0)-b(u,z)]\\&\le-\lambda\|z\|^2+\|g(u)-g(0)\|\,\|z\|+\rho\|N(w,y)\|\,\|\eta(0,z)\|+\rho\gamma\|u\|\,\|z\|\\&\le-\lambda\|z\|^2+\zeta\|u\|\,\|z\|+\rho\delta\tau(\|w\|+\|y\|)\|z\|+\rho\gamma\|u\|\,\|z\|\\&=-\lambda\|z\|\{\|z\|-\lambda^{-1}[\zeta\|u\|+\rho\delta\tau(\|w\|+\|y\|)+\rho\gamma\|u\|]\}<0,\end{aligned}$$

故引理 1.1 的条件 (iv) 也成立. 据引理 1.1, 存在 $\overline{z}\in H$, 使得 $\phi(v,\overline{z})\ge0$, $\forall\,v\in H$, 即

$$\langle g(v),v-\overline{z}\rangle-\langle g(u),v-\overline{z}\rangle+\rho\langle N(w,y),\eta(v,\overline{z})\rangle-\rho b(u,\overline{z})+\rho b(u,v)\ge0,\quad\forall\,v\in H.\tag{2.2}$$

对任意 $t\in(0,1]$ 及 $v\in H$, 令 $x_t=tv+(1-t)\overline{z}$. 在 (2.2) 式中, 用 x_t 代换 v, 并利用假设 1.1 的 (2) 与 (3) 及 b 的性质 (iv), 即得

$$\begin{aligned}0&\le\langle g(x_t),x_t-\overline{z}\rangle-\langle g(u),x_t-\overline{z}\rangle+\rho\langle N(w,y),\eta(x_t,\overline{z})\rangle-\rho b(u,\overline{z})+\rho b(u,x_t)\\&=t(\langle g(x_t),v-\overline{z}\rangle-\langle g(u),v-\overline{z}\rangle)-\rho\langle N(w,y),\eta(\overline{z},tv+(1-t)\overline{z})\rangle\\&\quad-\rho b(u,\overline{z})+\rho b(u,tv+(1-t)\overline{z})\\&\le t(\langle g(x_t),v-\overline{z}\rangle-\langle g(u),v-\overline{z}\rangle)+\rho t\langle N(w,y),\eta(v,\overline{z})\rangle+\rho t[b(u,v)+b(u,\overline{z})]\end{aligned}$$

可见

$$\langle g(x_t),v-\overline{z}\rangle-\langle g(u),v-\overline{z}\rangle+\rho\langle N(w,y),\eta(v,\overline{z})\rangle+\rho b(u,v)-\rho b(u,\overline{z})\ge0.$$

于是

$$\langle g(x_t),v-\overline{z}\rangle\ge\langle g(u),v-\overline{z}\rangle-\rho\langle N(w,y),\eta(v,\overline{z})\rangle+\rho b(u,\overline{z})-\rho b(u,v).$$

令 $t\to0^+$, 则由 g 的 Lipschitz 连续性推得

$$\langle g(\overline{z}),v-\overline{z}\rangle\ge\langle g(u),v-\overline{z}\rangle-\rho\langle N(w,y),\eta(v,\overline{z})\rangle+\rho b(u,\overline{z})-\rho b(u,v),\quad\forall\,v\in H.$$

因此, $\overline{z}\in H$ 是辅助问题 $P(u,w,y)$ 的解. 证毕.

注 5 易见, 若 $g\equiv I$, 其中 I 是 H 上的恒等映象, 则定理 2.1 化为 Huang 与 Deng [1] 的定理 3.1.

利用定理 2.1, 今构造用于解广义集值强非线性混合似变分不等式 (1.1) 的迭代算法如下:

对给定的 $u_0\in H$, $w_0\in T(u_0)$ 及 $y_0\in A(u_0)$, 据定理 2.1 得知, 辅助问题 $P(u_0,w_0,y_0)$ 有解 u_1, 即

$$\langle g(u_1),v-u_1\rangle\ge\langle g(u_0),v-u_1\rangle-\rho\langle N(w_0,y_0),\eta(v,u_1)\rangle+\rho b(u_0,u_1)-\rho b(u_0,v),\quad\forall\,v\in H.$$

由于 $w_0\in T(u_0)\in CB(H)$ 且 $y_0\in A(u_0)\in CB(H)$, 故据 Nadler [16], 存在 $w_1\in T(u_1)$ 与 $y_1\in A(u_1)$, 使得

$$\|w_0-w_1\|\le(1+1)H(T(u_0),T(u_1));\ \ \|y_0-y_1\|\le(1+1)H(A(u_0),A(u_1)).$$

又由定理 2.1 得知, 辅助问题 $P(u_1,w_1,y_1)$ 有解 u_2, 即

$$\langle g(u_2),v-u_2\rangle \geq \langle g(u_1),v-u_2\rangle-\rho\langle N(w_1,y_1),\eta(v,u_2)\rangle+\rho b(u_1,u_2)-\rho b(u_1,v),\quad \forall\, v\in H.$$

对 $w_1\in T(u_1)$ 与 $y_1\in A(u_1)$, 又据 Nadler [16], 存在 $w_2\in T(u_2)$ 与 $y_2\in A(u_2)$, 使得

$$\|w_1-w_2\|\leq(1+1/2)H(T(u_1),T(u_2));\quad \|y_1-y_2\|\leq(1+1/2)H(A(u_1),A(u_2)).$$

由归纳法即得问题 (1.1) 的迭代算法如下:

算法 2.1 对给定的 $u_0\in H$, $w_0\in T(u_0)$ 及 $y_0\in A(u_0)$ 存在 H 中序列 $\{w_n\}$, $\{y_n\}$ 及 $\{u_n\}$ 满足条件

$$\begin{aligned}
&w_n\in T(u_n),\quad \|w_n-w_{n+1}\|\leq(1+1/(n+1))H(T(u_n),T(u_{n+1})),\\
&y_n\in A(u_n),\quad \|y_n-y_{n+1}\|\leq(1+1/(n+1))H(A(u_n),A(u_{n+1})),\\
&\langle g(u_{n+1}),v-u_{n+1}\rangle\geq\langle g(u_n),v-u_{n+1}\rangle-\rho\langle N(w_n,y_n),\eta(v,u_{n+1})\rangle\\
&\qquad\qquad+\rho b(u_n,u_{n+1})-\rho b(u_n,v),\quad \forall\, v\in H,\quad n=0,1,2,\ldots,
\end{aligned}\tag{2.3}$$

其中 $\rho>0$ 是常数.

注 6 易见, 若 $g\equiv I$, H 上的恒等映象, 则算法 2.1 化为 Huang 与 Deng [1] 的算法 3.1.

3 存在性与收敛性定理

本节, 证明了广义集值强非线性混合似变分不等式 (1.1) 的解的存在性和由算法生成的序列的收敛性.

定理 3.1 设 $g:H\to H$ 是 Lipschitz 连续的, 具常数 $\zeta>0$, 且是强单调的, 具常数 $\lambda>0$; $N:H\times H\to H$ 关于第一、第二变量皆是 Lipschitz 连续的, 分别具 Lipschitz 常数 $\beta,\xi>0$; $A,T:H\to CB(H)$ 皆是 Lipschitz 连续的, 分别具 Lipschitz 常数 μ, $v>0$. 又设 N 关于 T 与 A 是强混合单调的, 具常数 $\alpha>0$; $\eta:H\times H\to H$ 是强单调的, 具常数 $\sigma>0$, 且是 Lipschitz 连续的, 具常数 $\delta>0$. 假定函数 $b(\cdot,\cdot)$ 满足性质 (i)–(iv). 若假设 1.1 成立, 且存在常数 $\rho>0$, 使得

$$\begin{cases}
k=\left(\sqrt{1-2\lambda+\zeta^2}+\sqrt{1-2\sigma+\delta^2}+\delta-\lambda\right)/2\delta,\\
\rho\gamma/\delta+2k<1,\quad \alpha>\gamma/\delta+\sqrt{((\beta v+\xi\mu)^2-\gamma^2/\delta^2)4k(1-k)},\\
\left|\rho-\dfrac{\alpha-\gamma/\delta}{(\beta v+\xi\mu)^2-\gamma^2/\delta^2}\right|\leq\dfrac{\sqrt{(\alpha-\gamma/\delta)^2-((\beta v+\xi\mu)^2-\gamma^2/\delta^2)4k(1-k)}}{(\beta v+\xi\mu)^2-\gamma^2/\delta^2},
\end{cases}\tag{3.1}$$

则存在 $u\in H$, $w\in T(u)$ 及 $y\in A(u)$ 满足广义集值强非线性混合似变分不等式 (1.1), 且当 $n\to\infty$ 时, $\{u_n\}$, $\{w_n\}$ 及 $\{y_n\}$ 分别强收敛到 u,w 及 y, 其中, 序列 $\{u_n\}$, $\{w_n\}$ 及 $\{y_n\}$ 由算法 2.1 所定义.

证明 对任意 $v\in H$, 由 (2.3) 式, 即有

$$\begin{aligned}
\langle g(u_n),v-u_n\rangle\geq&\langle g(u_{n-1}),v-u_n\rangle-\rho\langle N(w_{n-1},y_{n-1}),\eta(v,u_n)\rangle\\
&+\rho b(u_{n-1},u_n)-\rho b(u_{n-1},v),
\end{aligned}\tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
\langle g(u_{n+1}),v-u_{n+1}\rangle\geq&\langle g(u_n),v-u_{n+1}\rangle-\rho\langle N(w_n,y_n),\eta(v,u_{n+1})\rangle\\
&+\rho b(u_n,u_{n+1})-\rho b(u_{n-1},v).
\end{aligned}\tag{3.3}$$

在 (3.2) 和 (3.3) 式中分别取 $v=u_{n+1}$ 与 $v=u_n$, 即得

$$\begin{aligned}\langle g(u_n), u_{n+1}-u_n\rangle \geq{}& \langle g(u_{n-1}), u_{n+1}-u_n\rangle-\rho\langle N(w_{n-1}, y_{n-1}), \eta(u_{n+1}, u_n)\rangle\\&+\rho b(u_{n-1}, u_n)-\rho b(u_{n-1}, u_{n+1}),\end{aligned}\tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\langle g(u_{n+1}), u_n-u_{n+1}\rangle \geq{}& \langle g(u_n), u_n-u_{n+1}\rangle-\rho\langle N(w_n, y_n), \eta(u_n, u_{n+1})\rangle\\&+\rho b(u_n, u_{n+1})-\rho b(u_{n-1}, u_n),\end{aligned}\tag{3.5}$$

把 (3.4) 与 (3.5) 式相加, 即有

$$\begin{aligned}\langle g(u_{n+1})-g(u_n), u_n-u_{n+1}\rangle \geq{}& \langle g(u_n)-g(u_{n-1}), u_n-u_{n+1}\rangle\\&-\rho\langle N(w_n, y_n)-N(w_{n-1}, y_{n-1}), \eta(u_n, u_{n+1})\rangle\\&+\rho b(u_{n-1}-u_n, u_n)+\rho b(u_n-u_{n-1}, u_{n+1}).\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\langle g(u_n)-g(u_{n+1}), u_n-u_{n+1}\rangle\\&\quad\leq \langle g(u_{n-1})-g(u_n), u_n-u_{n+1}\rangle\\&\qquad-\rho\langle(N(w_{n-1}, y_{n-1})-N(w_n, y_n)), \eta(u_n, u_{n+1})\rangle\\&\qquad+\rho[b(u_n-u_{n-1}, u_n)-b(u_n-u_{n-1}, u_{n+1})]\\&\quad=\langle g(u_{n-1})-g(u_n)-(u_{n-1}-u_n), u_n-u_{n+1}\rangle\\&\qquad+\langle u_{n-1}-u_n, u_n-u_{n+1}-\eta(u_n, u_{n+1})\rangle\\&\qquad+\langle u_{n-1}-u_n-\rho(N(w_{n-1}, y_{n-1})-N(w_n, y_n)), \eta(u_n, u_{n+1})\rangle\\&\qquad+\rho[b(u_n-u_{n-1}, u_n)-b(u_n-u_{n-1}, u_{n+1})]\\&\quad\leq \|g(u_{n-1})-g(u_n)-(u_{n-1}-u_n)\|\,\|u_n-u_{n+1}\|\\&\qquad+\|u_{n-1}-u_n\|\,\|u_n-u_{n+1}-\eta(u_n, u_{n+1})\|\\&\qquad+\|u_{n-1}-u_n-\rho(N(w_{n-1}, y_{n-1})-N(w_n, y_n))\|\,\|\eta(u_n, u_{n+1})\|\\&\qquad+\rho\gamma\|u_n-u_{n-1}\|\,\|u_n-u_{n+1}\|.\end{aligned}\tag{3.6}$$

因 $g: H\rightarrow H$ 是 Lipschitz 连续的, 具常数 $\zeta>0$, 且是强单调的, 具常数 $\lambda>0$; 又因 $\eta(\cdot,\cdot)$ 是强单调的, 具常数 $\sigma>0$, 且是 Lipschitz 连续的, 具常数 $\delta>0$, 故推得

$$\begin{aligned}&\|u_{n-1}-u_n-(g(u_{n-1})-g(u_n))\|^2\\&\quad=\|u_{n-1}-u_n\|^2-2\langle u_{n-1}-u_n, g(u_{n-1})-g(u_n)\rangle+\|g(u_{n-1})-g(u_n)\|^2\\&\quad\leq(1-2\lambda+\zeta^2)\|u_{n-1}-u_n\|^2,\end{aligned}\tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}&\|u_n-u_{n+1}-\eta(u_n, u_{n+1})\|^2\\&\quad=\|u_n-u_{n+1}\|^2-2\langle u_n-u_{n+1}, \eta(u_n, u_{n+1})\rangle+\|\eta(u_n, u_{n+1})\|^2\\&\quad\leq(1-2\sigma+\delta^2)\|u_n-u_{n+1}\|^2.\end{aligned}\tag{3.8}$$

据 N 关于第一变量的 Lipschitz 连续性与 T 的 H-Lipschitz 连续性, 得知

$$\|N(w_{n-1}, y_{n-1})-N(w_n, y_{n-1})\| \leq \beta\|w_{n-1}-w_n\| \leq \beta v\left(1+\frac{1}{n}\right)\|u_{n-1}-u_n\|.\tag{3.9}$$

又据 N 关于第二变量的 Lipschitz 连续性与 A 的 H-Lipschitz 连续性, 得知

$$\|N(w_n,y_{n-1})-N(w_n,y_n)\|\le\xi\|y_{n-1}-y_n\|\le\xi\mu\left(1+\frac{1}{n}\right)\|u_{n-1}-u_n\|. \tag{3.10}$$

于是, 由 (3.9), (3.10) 式及 N 关于 T 与 A 的强混合单调性, 即有

$$\begin{aligned}
&\|u_{n-1}-u_n-\rho(N(w_{n-1},y_{n-1})-N(w_n,y_n))\|^2\\
&\quad=\|u_{n-1}-u_n\|^2-2\rho\langle N(w_{n-1},y_{n-1})-N(w_n,y_n),u_{n-1}-u_n\rangle\\
&\qquad+\rho^2\|N(w_{n-1},y_{n-1})-N(w_n,y_n)\|^2\\
&\quad\le\|u_{n-1}-u_n\|^2-2\rho\alpha\|u_{n-1}-u_n\|^2\\
&\qquad+\rho^2\|N(w_{n-1},y_{n-1})-N(w_n,y_{n-1})+N(w_n,y_{n-1})-N(w_n,y_n)\|^2\\
&\quad\le(1-2\rho\alpha)\|u_{n-1}-u_n\|^2+\rho^2[\|N(w_{n-1},y_{n-1})-N(w_n,y_{n-1})\|\\
&\qquad+\|N(w_n,y_{n-1})-N(w_n,y_n)\|]^2\\
&\quad\le(1-2\rho\alpha)\|u_{n-1}-u_n\|^2+\rho^2\left[\beta v\left(1+\frac{1}{n}\right)\|u_{n-1}-u_n\|+\xi\mu\left(1+\frac{1}{n}\right)\|u_{n-1}-u_n\|\right]^2\\
&\quad=\left[1-2\rho\alpha+\rho^2(\beta v+\xi\mu)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right]\|u_{n-1}-u_n\|^2.
\end{aligned}\tag{3.11}$$

因此, 由 (3.6)–(3.11) 式, 推得

$$\begin{aligned}
\lambda\|u_n-u_{n+1}\|^2&\le\langle g(u_n)-g(u_{n+1}),u_n-u_{n+1}\rangle\\
&\le\sqrt{1-2\lambda+\zeta^2}\,\|u_{n-1}-u_n\|\,\|u_n-u_{n+1}\|\\
&\quad+\sqrt{1-2\sigma+\delta^2}\,\|u_{n-1}-u_n\|\,\|u_n-u_{n+1}\|\\
&\quad+\delta\sqrt{1-2\rho\alpha+\rho^2(\beta v+\xi\mu)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\,\|u_{n-1}-u_n\|\,\|u_n-u_{n+1}\|\\
&\quad+\rho\gamma\|u_{n-1}-u_n\|\,\|u_n-u_{n+1}\|.
\end{aligned}$$

从而, 有

$$\|u_n-u_{n+1}\|\le\theta_n\|u_{n-1}-u_n\|, \tag{3.12}$$

其中

$$\begin{aligned}
\theta_n&=\frac{\delta}{\lambda}\left(t_n(\rho)+\rho\cdot\frac{\gamma}{\delta}+\left(\sqrt{1-2\lambda+\zeta^2}+\sqrt{1-2\sigma+\delta^2}\right)/\delta\right),\\
t_n(\rho)&=\sqrt{1-2\rho\alpha+\rho^2(\beta v+\xi\mu)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}.
\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
\theta&=\frac{\delta}{\lambda}\left(t(\rho)+\rho\cdot\frac{\gamma}{\delta}+\left(\sqrt{1-2\lambda+\zeta^2}+\sqrt{1-2\sigma+\delta^2}\right)/\delta\right),\\
t(\rho)&=\sqrt{1-2\rho\alpha+\rho^2(\beta v+\xi\mu)^2},
\end{aligned}$$

则易见, 当 $n\to\infty$ 时, $t_n(\rho)\to t(\rho)$, $\theta_n\to\theta$. 注意到

$$\theta_n<1 \iff t(\rho)+\rho\cdot\frac{\gamma}{\delta}+2k<1,$$

其中

$$k=\big(\sqrt{1-2\lambda+\zeta^2}+\sqrt{1-2\sigma+\delta^2}+\delta-\lambda\big)/2\delta.$$

今据条件 (3.1) 得知 $\theta<1$, 于是存在正数 $\theta_0<1$ 与整数 $n_0\ge 1$, 使得 $\theta_n\le\theta_0<1$, $\forall n\ge n_0$. 所以, 由 (3.12) 式即知 $\{u_n\}$ 是 H 中的 Cauchy 序列. 因此, 可设 $\{u_n\}$ 强收敛到 $u\in H$. 由于 T 与 A 皆是 H-Lipschitz 连续的, 故由 (2.3) 式, 即有

$$\begin{aligned}
&\|w_n-w_{n+1}\|\le(1+1/(n+1))H(T(u_n),T(u_{n+1}))\le(1+1/(n+1))v\|u_n-u_{n+1}\|,\\
&\|y_n-y_{n+1}\|\le(1+1/(n+1))H(A(u_n),A(u_{n+1}))\le(1+1/(n+1))\mu\|u_n-u_{n+1}\|.
\end{aligned}$$

从而, 即知 $\{w_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 皆是 H 中的 Cauchy 序列. 令 $w_n\to w$ $(n\to\infty)$, $y_n\to y$ $(n\to\infty)$. 因 $w_n\in T(u_n)$, 故有

$$\begin{aligned}
d(w,T(u))&\le\|w-w_n\|+d(w_n,T(u_n))+H(T(u_n),T(u))\\
&\le\|w-w_n\|+v\|u_n-u\|\to 0\quad(n\to\infty).
\end{aligned}$$

于是, 得知 $w\in T(u)$. 类似可知 $y\in A(u)$.

今改写 (2.3) 式如下

$$\langle g(u_{n+1})-g(u_n),v-u_{n+1}\rangle+\rho\langle N(w_n,y_n),\eta(v,u_{n+1})\rangle+\rho[b(u_n,v)-b(u_n,u_{n+1})]\ge 0.$$

由于 $u_n\to u$ $(n\to\infty)$, 故有

$$\begin{aligned}
|\langle g(u_{n+1})-g(u_n),v-u_{n+1}\rangle|&\le\|g(u_{n+1})-g(u_n)\|\,\|v-u_{n+1}\|\\
&\le\zeta\|u_{n+1}-u_n\|\,\|v-u_{n+1}\|\to 0\quad(n\to\infty).
\end{aligned}$$

据假设 1.1 的 (3), 即得

$$\langle N(w,y),\eta(v,u)\rangle\ge\limsup_{n\to\infty}\langle N(w,y),\eta(v,u_{n+1})\rangle.$$

由于 $N(w_n,y_n)\to N(w,y)\in H$ $(n\to\infty)$, 故由 $\{\eta(v,u_{n+1})\}$ 的有界性, 即得

$$\begin{aligned}
0&\le\langle N(w,y),\eta(v,u)\rangle-\limsup_{n\to\infty}\langle N(w,y),\eta(v,u_{n+1})\rangle\\
&=\liminf_{n\to\infty}\{\langle N(w,y),\eta(v,u)\rangle-\langle N(w,y),\eta(v,u_{n+1})\rangle\}\\
&=\liminf_{n\to\infty}\{\langle N(w,y),\eta(v,u)\rangle-\langle N(w,y),\eta(v,u_{n+1})\rangle\\
&\quad+\langle N(w,y)-N(w_n,y_n),\eta(v,u_{n+1})\rangle\}\\
&=\liminf_{n\to\infty}\{\langle N(w,y),\eta(v,u)\rangle-\langle N(w_n,y_n),\eta(v,u_{n+1})\rangle\},
\end{aligned}$$

从而, 有

$$\langle N(w,y),\eta(v,u)\rangle\ge\limsup_{n\to\infty}\langle N(w_n,y_n),\eta(v,u_{n+1})\rangle.$$

再据 $b(\cdot,\cdot)$ 的性质 (i) 与注 1, 易见

$$\begin{aligned}|b(u_n,u_{n+1})-b(u,u)| &\le |b(u_n,u_{n+1})-b(u_n,u)|+|b(u_n,u)-b(u,u)|\\ &\le \gamma\|u_n\|\,\|u_{n+1}-u\|+\gamma\|u_n-u\|\,\|u\|\to 0 \quad (n\to\infty).\end{aligned}$$

于是, 当 $n\to\infty$ 时

$$b(u_n,u_{n+1})\to b(u,u),\quad b(u_n,v)\to b(u,v).$$

所以, 即得

$$\begin{aligned}0\le &\limsup_{n\to\infty}\{\langle g(u_{n+1})-g(u_n),v-u_{n+1}\rangle+\rho\langle N(w_n,y_n),\eta(v,u_{n+1})\rangle\\ &+\rho[b(u_n,g(v))-b(u_n,g(u_{n+1}))]\}\\ \le &\ \rho\langle N(w,y),\eta(v,u)\rangle+\rho[b(u,v)-b(u,u)],\end{aligned}$$

从而, 即有

$$\langle N(w,y),\eta(v,u)\rangle+b(u,v)-b(u,u)\ge 0,\quad \forall\, v\in H.$$

证毕.

参 考 文 献

[1] Huang N. J., Deng C. X., Auxiliary principle and iterative algorithms for generalized set-valued strongly nonlinear mixed variational-like inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, 2001, **256**: 345–359.

[2] Huang N. J., Liu Y. P., Tang Y. Y., Bai M. R., On the generalized set-valued strongly nonlinear implicit variational inequalities, *Comput. Math. Appl.*, 1999, **37**: 29–36.

[3] Noor M. A., Generalized variational-like inequalities, *Math. Comput. Modelling*, 1998, **27**: 93–101.

[4] Panagiotopoulos P. D., Stavroulakis G. E., New types of variational principles based on the notion of quasidifferentiability, *Acta Mech.*, 1992, **94**: 171–194.

[5] Parida J., Sen A., A variational-like inequality for multifunctions with applications, *J. Math. Anal. Appl.*, 1987, **124**: 73–81.

[6] Tian G., Generalized quasi variational-like inequality problem, *Math. Oper. Res.*, 1993, 18: 752–764.

[7] Yao J. C., The generalized quasi variational inequality problem with applications, *J. Math. Anal. Appl.*, 1991, **158**: 139–160.

[8] Yao J. C., Abstract variational inequality problems and a basic theorem of complementarity, *Comput. Math. Appl.*, 1993, **25**: 73–79.

[9] Cubiotti P., Existence of solutions for lower semicontinuous quasi equilibrium problems, *Comput. Math. Appl.*, 1995, **30**: 11–22.

[10] Noor M. A., Auxiliary principle for generalized mixed variational-like inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, 1997, **215**: 78–85.

[11] Glowinski R., Lions J. L., Tremolieres R., Numerical analysis of variational inequalities, Amsterdam: North-Holland, 1981.

[12] Liu L. W., Li Y. Q., On generalized set-valued variational inclusions, *J. Math. Anal. Appl.*, 2001, **261**: 231–240.

[13] Chang S. S., Variational inequality and complementarity problem theory with applications, Shanghai: Shanghai Sci. Technol. Literature Publ. House, 1991.

[14] Chang S. S., Xiang S. W., On the existence of solutions for a class of quasi-bilinear variational inequalities, *J. Systems Sci. Math. Sci.*, 1996, **16**: 136–140.

[15] Ansari Q. H., Yao J. C., Iterative schemes for solving mixed variational-like inequalities, *J. Optim. Theory Appl.*, 2001, **108**: 527–541.

[16] Nadler S. B. Jr., Multi-valued contraction mappings, *Pacific J. Math.*, 1969, **30**: 475–488.