第48卷第5期 数 学 学 报 Vol.48, No.5
2005年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA Sept., 2005

文章编号: 0583-1431(2005)05-1011-10 **文献标识码: A**

一类二阶自共轭矩阵微分系统的区间振动定理

杨启贵

华南理工大学数学科学学院 广州 510640
E-mail: yangqigui@263.net

摘 要 本文运用单调泛函和广义区间平均方法, 获得了一类二阶自共轭矩阵微分系统 $[P(t)X'(t)]'+Q(t)X(t)=0$ 的一些新的区间振动定理.

关键词 矩阵微分系统; 单调泛函; 振动定理
MR(2000) 主题分类 34A30, 34C10
中图分类 O174.2

Oscillation Theorems for Certain Second Order Self-Adjoint Matrix Differential Systems on Interval

Qi Gui YANG

School of Mathematical Sciences, South China University of Technology, Guangzhou 510640*, P. R. China*
E-mail: yangqigui@263.net

Abstract By means of monotone functionals and the generalized interval means method, some new oscillation criteria for self-adjoint differential matrix system of the form $[P(t)X'(t)]'+Q(t)X(t)=0$ are obtained.

Keywords Matrix differential system; Monotone functional; Oscillation criterion
MR(2000) Subject Classification 34A30, 34C10
Chinese Library Classification O174.2

1 引言及定义

本文考虑如下矩阵微分系统

$$[P(t)X'(t)]'+Q(t)X(t)=0,\quad t\ge t_0,\tag{1}$$

其中 $t_0\ge 0$, P 和 Q 满足下列条件:

(A_1) $P(t)>0$, $Q(t)\in\mathscr{S}$, 当 $t\ge t_0$ 时.

这里和后面, 记 $\mathscr{M}$ 为 $n\times n$ 实矩阵线性空间, $E_n\in\mathscr{M}$ 为单位矩阵, $\mathscr{S}$ 为 $\mathscr{M}$ 中所有对称矩阵构成的子空间. 进一步, $n\times n$ 矩阵 $M>0$ 和 $M\ge 0$ 分别表示 M 为正定矩阵和半正定矩阵.

系统 (1) 的矩阵函数解 $X\in C^2([t_0,\infty),\mathscr{M})$ 称为非平凡和自共轭 (预备) 解若至少存在一点 $t\in[t_0,\infty)$, 使得 $\det X(t)\ne 0$, 且 $X(t)$ 满足

$$X^*(t)P(t)X'(t)-(P(t)X'(t))^*X(t)=0,\quad t\ge t_0,\tag{2}$$

收稿日期: 2003-06-18; 修改日期: 2004-07-21;接受日期: 2004-10-25
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10461002); 广西省自然科学基金资助项目 (0236012)

其中 M^* 表示 M 的转置矩阵. 系统 (1) 的一预备解 $X(t)$ 在 $[t_0,\infty)$ 上 $\det X(t)$ 有任意大零点则称 $X(t)$ 振动; 否则, 称为不振动.

系统 (1) 及其特殊系统

$$X''(t)+Q(t)X(t)=0, \tag{3}$$

的振动性态在力学系统中有着重要作用. 因此, 这样的性质被广泛的研究 (见文 [1–14] 与它们所附的参考文献), 其中一些结果是运用正线性泛函方法, 证明矩阵微分系统 (1) 所对应的标量系统的振动性而获得 (1) 的振动准则, 见文 [5,15,16]. 而另一些振动结果则是利用矩阵 $Q(t)$ 的积分的特征值泛函获得, 见文 [1–4,6–12,14] 和所附的参考文献.

对任意 $A\in\mathscr{S}$, 假设 A 的特征值 λ_i, $i=1,2,\ldots,n$, 按如下方式排列

$$\lambda_{\min}[A]=\lambda_n[A]\le\cdots\le\lambda_2[A]\le\lambda_1[A]=\lambda_{\max}[A]. \tag{4}$$

Hinton 和 Lewis [6] 提出猜想：若

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_1\left[\int_0^t Q(s)ds\right]=\infty, \tag{5}$$

则矩阵微分系统 (3) 是振动的.

这个猜想被许多研究者部分地证明, 最后由 Byers, Harrir 和 Kwong [2] 彻底解决. Hinton 和 Lewis 猜想有更一般形式且可运用于系统 (1), 见文 [3]. Butler et al. 在文 [1] 中证明了系统 (3) 是振动的, 如果

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_a^t\lambda_1\left[Q(s)\right]ds=\infty \tag{6}$$

且 $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_a^t\int_a^s\operatorname{tr}\left[Q(u)\right]duds=\infty$. 文 [4] 进一步证明了: 系统 (3) 是振动的, 如果

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^m}\lambda_1\left[\int_0^t(t-s)^mQ(s)ds\right]=\infty \tag{7}$$

对某些 $m>1$ 时. 后来 Erbe et al. 的工作相续被 Meng et al. [8], Wang [9] 和 Kumari et al. [15] 广泛地推广. 另一些基于 Kamenev 型的矩阵微分系统 (1) 和它的特殊系统 (3) 振动准则, 也能在早期论文 [4,8] 及近来的文献 [10–13] 所附的参考文献中找到.

最近, 在文 [17,18] 和它们所附的参考文献中, 建立了关于二阶标量常微分方程的区间振动准则. Kong [7], Yang [10,11], Wang [12], Yang [13] 和 Zhuang [14] 进一步讨论了矩阵微分系统 (1) 振动的区间准则. 但是我们注意到由 (5)–(7) 式和文 [1–4,8–12,14,15] 所给出的准则仅包括某些积分的最大或最小特征值, 除了最大或最小特征值以外, 究竟能否运用其他特征值泛函和其他非线性泛函究来判断系统的振动性, 这是不清楚的. 因此基于这些事实, 寻找系统 (1) 新的振动判别准则是非常有意义的.

本文建立了二阶自共轭矩阵微分系统 (1) 另一种新的振动区间准则, 所得的结果即使对二阶常微分方程也是新的. 运用某些单调泛函, 一般平均和矩阵 Riccati 型变换来实现我们的目标. 特别, 我们也将所建立的系统 (1) 的这些结果推广到具有阻尼项的二阶自共轭矩阵微分系统

$$[P(t)X'(t)]'+r(t)P(t)X'(t)+Q(t)X(t)=0,\quad t\ge t_0, \tag{8}$$

其中 $t_0\ge 0$, r, P 和 Q 满足下列条件:

(B1) $r\in C([t_0,\infty),\mathbf{R})$; $P(t)>0$, $Q(t)\in\mathscr{S}$ 当 $t\ge t_0$ 时.

本文改进了文 [19–21] 关于标量方程当 $P(t)=1$ 时的系统 (8) 的定理, 且结论与文 [10–14] 的结果不相互包含. 我们的结果不仅表明包括某些积分的最大特征值泛函可以用来判别振动性态, 而且包括某些积分的每个特征值泛函、正线性泛函以及其他非线性泛函也能够用来确定振动特性. 进一步, 通过选取适当的单调泛函 q 和平均函数, 可以得到一系列新的精确的振动准则. 因此本文推广、改进和统一大量存在性结果. 详细细节可见后面的注 1 和 2.

在叙述本文主要结果之前, 需要下列定义和引理.

定义 1.1 函数 $q:\mathscr{S}\to\mathbf{R}$ 称为单调 (或不减) 若 $J-K\geq 0$, 则有 $q[J]\geq q[K]$, 当 J, $K\in\mathscr{S}$时.

定义 1.2 定义在 $\mathscr{S}$ 的线性泛函 $\mathbf{L}$ 叫 "正的", 如果对任意的 $A\in\mathscr{S}$ 和 $A>0$ 时, 都有 $\mathbf{L}(A)>0$.

在 $\mathscr{S}$ 中的矩阵特征值的经典刻画, 通常称为 "特征值" 泛函 $q[K]=\lambda_i[K]$ $(i=1,2,\ldots,n)$ 是单调泛函. 另一方面, 可以验证在 $\mathscr{S}$ 中若 $J\geq 0$, 则非线性泛函 $q[K]=\lambda_i[K+J]$ $(i=1,2,\ldots,n)$ 也是单调泛函且 $\lambda_i[K+J]\geq\lambda_i[K]$. 进一步, 在 $\mathscr{S}$ 上由 $q[K]=\mathrm{tr}[K+E_n]$ 定义的迹泛函也是单调泛函. 同时正线性泛函 $\mathbf{L}$ 也是单调泛函, 且当 J, $K\in\mathscr{S}$ 时, 若 $J\geq K$, 则必有 $\mathbf{L}[J]\geq\mathbf{L}[K]$.

定义 1.3 令 $D=\{(t,s):t\geq s\geq t_0\}$, $D_0=\{(t,s):t>s>t_0\}$. 称实值函数 H 是 $H\in\mathscr{H}$, 如果存在函数 λ_1 和 $\lambda_2\in C^1(D_0,\mathbf{R})$ 满足下列条件:

(H1) $H(t,t)=0$ 对 $t\geq t_0$; $H(t,s)>0$ 在 D_0 上;

(H2) $\frac{\partial}{\partial t}(H(t,s))=\lambda_1(t,s)\sqrt{H(t,s)}$, $\frac{\partial}{\partial s}(H(t,s))=-\lambda_2(t,s)\sqrt{H(t,s)}$, $\forall\,(t,s)\in D_0$.

对情形 $H(t,s)=H(t-s)\in\mathscr{H}$, 有 $\lambda_1(t,s)=\lambda_2(t,s):=\lambda(t-s)$. 记在 $\mathscr{H}$ 中包含这样的 $H(t-s)$ 的子集为 $\mathscr{H}_0$.

进一步, 令 $\rho\in C^1[t_0,\infty)$ 和 $\rho>0$. 积分算子 $A^\rho(\cdot;\tau,t):\mathscr{S}\to\mathscr{S}$ 及 $B^\rho(\cdot;t,\tau):\mathscr{S}\to\mathscr{S}$ 分别定义如下

$$A^\rho(K;\tau,t)=\int_\tau^t H(t,s)\rho(s)K(s)ds,\quad t\geq\tau\geq t_0,\tag{9}$$

$$B^\rho(K;\tau,t)=\int_t^\tau H(s,t)\rho(s)K(s)ds,\quad \tau\geq t\geq t_0,\tag{10}$$

其中 $K\in C([t_0,\infty),\mathscr{S})$.

易验证 $A^\rho(\cdot\,;\tau,t)$ 和 $B^\rho(\cdot;t,\tau)$ 是在 $\mathscr{S}$ 上的线性算子且满足

$$A^\rho(K';\tau,t)=-H(t,\tau)\rho(\tau)K(\tau)+A^\rho([\lambda_2-\rho^{-1}\rho']K;\tau,t),\quad t\geq\tau\geq t_0,\tag{11}$$

$$B^\rho(K';t,\tau)=H(\tau,t)\rho(\tau)K(\tau)-B^\rho([\lambda_1-\rho^{-1}\rho']K;t,\tau),\quad \tau\geq t\geq t_0.\tag{12}$$

这里 $\lambda_1=\lambda_1(s,t)$ 和 $\lambda_2=\lambda_2(t,s)$.

引理 1.1 (I) 若 K, $J\in\mathscr{S}$ 和 $K\geq J$, 则 $\lambda_i[K]\geq\lambda_i[J]$, $i=1,2,\ldots,n$.

(II) $\lambda_i[\mu K]=\mu\lambda_i[K]$ 对任意的 $K\in\mathscr{S}$, $\mu>0$ 和 $i=1,2,\ldots,n$.

证明 第一部分由文 [7] 可得, 第二部分则直接由特征值定义推出.

引理 1.2 设 $X(t)$ 是系统 (1) 的非平凡解且当 $t\in[t_0,\infty)$ 时, 有 $\det X(t)\neq 0$, 则矩阵函数

$$W(t)=P(t)X'(t)X^{-1}(t)\tag{13}$$

满足 Riccati 系统

$$W'(t)=-Q(t)-W(t)P^{-1}(t)W(t).\tag{14}$$

证明 由 (2) 式易知, 当 $t\in[t_0,\infty)$ 时, $W^*(t)=W(t)$ 成立. 根据系统 (1), 进一步可得

$$\begin{aligned}W'(t)&=[P(t)X'(t)]'X^{-1}(t)-P(t)X'(t)X^{-1}(t)X'(t)X^{-1}(t)\\&=-Q(t)X(t)X^{-1}(t)-W(t)P^{-1}(t)W(t)=-Q(t)-W(t)P^{-1}(t)W(t).\end{aligned}$$

2 基于单调泛函的区间振动定理

这一节运用单调泛函, 建立了包含矩阵函数 P 和 Q 在 $[t_0,\infty)$ 上的子区间序列的特性所表示的新的振动准则.

下面的引理对建立系统 (1) 的振动准则将是有用的.

引理 2.1 设 $X(t)$ 是系统 (1) 的一个预备解且当 $[c,b)\subset[t_0,\infty)$ 时, 满足 $\det X(t)\neq 0$, 对任意 $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$, 令 $W(t)=P(t)X'(t)X^{-1}(t)$, $t\in[c,b)$, 则对任意 $H\in\mathscr{H}$, 有

$$A^\rho\left(Q-\frac{1}{4}\left\{\lambda_2-\frac{\rho'}{\rho}\right\}^2P;c,b\right)\leq H(b,c)\rho(c)W(c).\tag{15}$$

证明 根据引理 1.2, $W(t)$ 满足 Riccati 方程 (14). 令 $R(s)=\left[P^{-1}(s)\right]^{1/2}$ 和 $S(t)=(RWR)(t)$, 可得 $W'(t)=\left\{-Q-R^{-1}(RWR)(RWR)R^{-1}\right\}(t)=\left\{-Q-R^{-1}S^2R^{-1}\right\}(t)$, 所以 (14) 式能够改写为

$$\left(W'+R^{-1}S^2R^{-1}+Q\right)(t)=0. \tag{16}$$

现对 (16) 式应用算子 $A^\rho(K;c,t)$, 则由 (11) 式, 可得

$$H(t,c)\rho(c)W(c)=A^\rho\left(\left[\lambda_2-\frac{\rho'}{\rho}\right]W;c,t\right)+A^\rho\left(R^{-1}S^2R^{-1};c,t\right)+A^\rho\left(Q;c,t\right). \tag{17}$$

这推得

$$\begin{aligned}H(t,c)\rho(c)W(c)&=A^\rho\left(R^{-1}S^2R^{-1}+R^{-1}R\left[\lambda_2-\frac{\rho'}{\rho}\right]WRR^{-1};c,t\right)+A^\rho\left(Q;c,t\right)\\&=A^\rho\left\{R^{-1}\left(S^2+\left[\lambda_2-\frac{\rho'}{\rho}\right]S\right)R^{-1};c,t\right\}+A^\rho\left(Q;c,t\right)\\&=A^\rho\left\{R^{-1}\left[S+\frac{1}{2}\left(\lambda_2-\frac{\rho'}{\rho}\right)E_n\right]^2R^{-1};c,t\right\}\\&\quad-A_\tau^\rho\left\{R^{-1}\left[\frac{1}{4}\left(\lambda_2-\frac{\rho'}{\rho}\right)^2E_n\right]R^{-1};c,t\right\}+A^\rho\left(Q;c,t\right),\end{aligned}$$

从而

$$H(t,c)\rho(c)W(c)=A^\rho\left\{R^{-1}\left[S+\frac{1}{2}\left(\lambda_2-\frac{\rho'}{\rho}\right)E_n\right]^2R^{-1};c,t\right\}+A^\rho\left(Q-\frac{1}{4}\left(\lambda_2-\frac{\rho'}{\rho}\right)^2P;c,t\right). \tag{18}$$

将 (18) 式中丢掉非负项, 则有 $A^\rho\left(Q-\frac{1}{4}\{\lambda_2-\frac{\rho'}{\rho}\}^2P;c,t\right)\le H(t,c)\rho(c)W(c)$. 在上述不等式中取 $t\to b^-$, 我们可得 (15) 式.

引理 2.2 设 $X(t)$ 是系统 (1) 的一个预备解且当 $(a,c]\subset[t_0,\infty)$ 时, 满足 $\det X(t)\neq 0$. 进一步对任意 $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$, 令 $W(t)=P(t)X'(t)X^{-1}(t)$, $t\in[c,b)$, 则对任意 $H\in\mathscr{H}$,

$$B^\rho\left(Q-\frac{1}{4}\left\{\lambda_1+\frac{\rho'}{\rho}\right\}^2P;a,c\right)\le -H(c,a)\rho(c)W(c). \tag{19}$$

证明 类似引理 2.1 证明, 应用算子 $B^\rho(K;t,c)$ 于 (16) 式, 则由 (12) 式, 得

$$-H(c,t)\rho(c)W(c)=-B^\rho\left(\left[\lambda_1+\frac{\rho'}{\rho}\right]W;c,t\right)+B^\rho\left(R^{-1}S^2R^{-1};t,c\right)+B^\rho\left(Q;t,c\right). \tag{20}$$

于是

$$\begin{aligned}-H(c,t)\rho(c)W(c)&=B^\rho\left(R^{-1}S^2R^{-1}-R^{-1}R\left[\lambda_1+\frac{\rho'}{\rho}\right]WRR^{-1};t,c\right)+B^\rho\left(Q;t,c\right)\\&=B^\rho\left\{R^{-1}\left(S^2-\left[\lambda_1+\frac{\rho'}{\rho}\right]S\right)R^{-1};t,c\right\}+B^\rho\left(Q;t,c\right)\\&=B^\rho\left\{R^{-1}\left[S-\frac{1}{2}\left(\lambda_1+\frac{\rho'}{\rho}\right)E_n\right]^2R^{-1};t,c\right\}\\&\quad-B^\rho\left\{R^{-1}\left[\frac{1}{4}\left(\lambda_1+\frac{\rho'}{\rho}\right)^2E_n\right]R^{-1};t,c\right\}+B^\rho\left(Q;t,c\right).\end{aligned}$$

因此

$$-H(c,t)\rho(c)W(c)=B^\rho\left\{R^{-1}\left[S-\frac{1}{2}\left(\lambda_1+\frac{\rho'}{\rho}\right)E_n\right]^2R^{-1};t,c\right\}+B^\rho\left(Q-\frac{1}{4}\left(\lambda_1+\frac{\rho'}{\rho}\right)^2P;t,c\right). \tag{21}$$

将 (21) 式中丢掉非负项, 则有 $B^\rho\left(Q-\frac{1}{4}\{\lambda_1+\frac{\rho'}{\rho}\}^2P;t,c\right)\le -H(c,t)\rho(c)W(c)$. 在上述不等式中取 $t\to a^+$, 可进一步得 (19) 式.

定理 2.1 若存在 $H\in\mathscr{H}$, $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$, $c\in(a,b)\subset[t_0,\infty)$ 和在 $\mathscr{S}$ 上的单调

泛函满足

$$\begin{aligned}&q\left[\frac{1}{H(c,a)}B^{\rho}\left(Q;a,c\right)+\frac{1}{H(b,c)}A^{\rho}\left(Q;c,b\right)\right]\\&\quad>q\left[\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{H(c,a)}B^{\rho}\left(v\left\{\lambda_1+\frac{\rho'}{\rho}\right\}^2P;a,c\right)+\frac{1}{H(b,c)}A^{\rho}\left(\left\{\lambda_2-\frac{\rho'}{\rho}\right\}^2P;c,b\right)\right\}\right].\end{aligned}\tag{22}$$

则对系统 (1) 的任意预备解 $X(t)$, $\det X(t)$ 在区间 (a,b) 上至少有一个零点.

证明 反证法, 假设矛盾. 不失一般性假设存在非平凡预备解 $X(t)$, 使得当 $t\in(a,b)$ 时, 有 $\det X(t)\neq0$. 定义 $W(t)$ 如 (13) 式. 根据引理 2.1 和 2.2 结果, 由 (15) 和 (19) 式, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{H(c,a)}B^{\rho}\left(Q;a,c\right)+\frac{1}{H(b,c)}A^{\rho}\left(Q;c,b\right)\\&\quad\le\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{H(c,a)}B^{\rho}\left(\left\{\lambda_1+\frac{\rho'}{\rho}\right\}^2P;a,c\right)+\frac{1}{H(b,c)}A^{\rho}\left(v\left\{\lambda_2-\frac{\rho'}{\rho}\right\}^2P;c,b\right)\right\}.\end{aligned}$$

再根据定义 1.1 的单调泛函, 进一步推出

$$\begin{aligned}&q\left[\frac{1}{H(c,a)}B^{\rho}\left(Q;a,c\right)+\frac{1}{H(b,c)}A^{\rho}\left(Q;c,b\right)\right]\\&\quad\le q\left[\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{H(c,a)}B^{\rho}\left(\left\{\lambda_1+\frac{\rho'}{\rho}\right\}^2P;a,c\right)+\frac{1}{H(b,c)}A^{\rho}\left(\left\{\lambda_2-\frac{\rho'}{\rho}\right\}^2P;c,b\right)\right\}\right].\end{aligned}$$

与 (22) 式矛盾. 定理 2.1 证毕.

下面定理是由定理 2.1 推出的系统 (1) 的区间振动准则.

定理 2.2 如果对每个 $T\ge t_0$, 存在 $H\in\mathscr{H}$, $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$ 和 a, b, $c\in\mathbf{R}$, 使得 $T\le a<c<b$ 及 (22) 式成立, 则系统 (1) 的任意预备解在 $[t_0,\infty)$ 上是振动的.

证明 反证法. 不失一般性, 可假设系统 (1) 存在非平凡预备解 $X(t)$, 使得当 $t\in[T_0,\infty)$ $(T_0\ge t_0)$ 时, 有 $\det X(t)\neq0$. 定义 $W(t)$ 如 (13) 式. 选取序列 $\{T_i\}\subset[T_0,\infty)$ 满足 $T_i\to\infty$ 当 $i\to\infty$ 时. 由 (22) 式知, 对每个 $i\in N$, 存在 $a_i,b_i,c_i\in\mathbf{R}$, 使得 $T_i\le a_i<c_i<b_i$ 和 (22) 式成立, 这里 a, b, c 分别被 a_i, b_i, c_i 代替. 根据定理 2.1, $\det X(t)$ 在区间 (a_i,b_i) $(i=1,2,\ldots)$ 上至少有一个零点 $t_i\in(a_i,b_i)$. 因此系统 (1) 是振动的. 证毕.

取 $H\in\mathscr{H}_0$, 可得

定理 2.3 设对每个 $l\ge t_0$, 存在 $H\in\mathscr{H}_0$, $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$, 在 $\mathscr{S}$ 上的单调泛函 q 和 a, $c\in\mathbf{R}$ 满足 $l\le a<c$ 和

$$\begin{aligned}&q\left[\int_a^c H(s-a)\left\{\rho(s)Q(s)+\rho(2c-s)Q(2c-s)\right\}ds\right]\\&\quad>q\left[\frac{1}{4}\int_a^c H(s-a)\left\{\left(\lambda(s-a)+\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}\right)^2(\rho P)(s)\right.\right.\\&\qquad\left.\left.+\left(\lambda(s-a)-\frac{\rho'(2c-s)}{\rho(2c-s)}\right)^2(\rho P)(2c-s)\right\}ds\right],\end{aligned}\tag{23}$$

则系统 (1) 的任意预备解在 $[t_0,\infty)$ 上是振动的.

证明 不失一般性, 可假设系统 (1) 存在非平凡预备解 $X(t)$, 使得当 $t\in[T_0,\infty)$ $(T_0\ge t_0)$ 时, 有 $\det X(t)\neq0$. 定义 $W(t)$ 如 (13) 式. 类似引理 2.1 和 2.2 的证明可得: 如果 $H\in\mathscr{H}_0$ 和在开区间 (a,b) 上 $\det X(t)\neq0$, 则对任意常数 $c\in(a,b)\subset[t_0,\infty)$,

$$A^{\rho}\left(Q-\frac{1}{4}\left\{\lambda_2-\frac{\rho'}{\rho}\right\}^2P;c,b\right)\le H(b-c)\rho(c)W(c)\tag{24}$$

和

$$B^{\rho}\left(Q-\frac{1}{4}\left\{\lambda_1+\frac{\rho'}{\rho}\right\}^2P;a,c\right)\le -H(c-a)\rho(c)W(c).\tag{25}$$

将 (24) 和 (25) 式相加, 推得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{H(c-a)}\int_a^c H(s-a)\rho(s)Q(s)ds+\frac{1}{H(b-c)}\int_c^b H(b-s)\rho(s)Q(s)ds\\&\le\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{H(c-a)}\int_a^c H(s-a)\left(\lambda(s-a)+\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}\right)^2(\rho P)(s)ds\right.\\&\qquad\left.+\frac{1}{H(b-c)}\int_c^b H(b-s)\left(\lambda(b-s)-\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}\right)^2(\rho P)(s)ds\right\}.\end{aligned}\tag{26}$$

另一方面, 选取 $b=2c-a$, 则 $H(b-c)=H(c-a)=H(\frac{b-a}{2})$, 且对任意 $w\in\mathbf{L}[a,b]$, 有 $\int_c^b w(s)ds=\int_a^c w(2c-s)ds$. 所以

$$\int_c^b H(b-s)\rho(s)Q(s)ds=\int_a^c H(s-a)\rho(2c-s)Q(2c-s)ds\tag{27}$$

和

$$\begin{aligned}&\int_c^b H(b-s)\left(\lambda(b-s)-\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}\right)^2(\rho P)(s)ds\\&\quad=\int_a^c H(s-a)\left(\lambda(s-a)-\frac{\rho'(2c-s)}{\rho(2c-s)}\right)^2(\rho P)(2c-s)ds.\end{aligned}\tag{28}$$

根据 (26), (27) 和 (28) 式, 可得

$$\begin{aligned}&\int_a^c H(s-a)\left\{\rho(s)Q(s)+\rho(2c-s)Q(2c-s)\right\}ds\\&\quad\le\frac{1}{4}\int_a^c H(s-a)\left\{\left(\lambda(s-a)-\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}\right)^2(\rho P)(s)+\left(\lambda(s-a)-\frac{\rho'(2c-s)}{\rho(2c-s)}\right)^2(\rho P)(2c-s)\right\}ds.\end{aligned}\tag{29}$$

再根据定义 1.1 的单调泛函, 进一步知

$$\begin{aligned}&q\left[\int_a^c H(s-a)\left\{\rho(s)Q(s)+\rho(2c-s)Q(2c-s)\right\}ds\right]\\&\quad\le q\left[\frac{1}{4}\int_a^c H(s-a)\left\{\left(\lambda(s-a)-\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}\right)^2(\rho P)(s)+\left(\lambda(s-a)-\frac{\rho'(2c-s)}{\rho(2c-s)}\right)^2(\rho P)(2c-s)\right\}ds\right].\end{aligned}\tag{30}$$

与 (23) 式矛盾. 因此, $\det X(t)$ 在开区间 $(a,2c-a)$ 上至少有一个零点. 类似定理 2.2 证明可得, 系统 (1) 是振动的. 定理 2.3 证毕.

下面考虑具有阻尼项的二阶自共轭矩阵微分系统 (8), 其中 r, P 和 Q 满足下列条件 (B_1).

选取 $v(t)=\exp\left\{\int_{t_0}^t r(s)ds\right\}$. 根据系统 (8), 得 $0=v(t)\{[P(t)X'(t)]'+r(t)P(t)X'(t)+Q(t)X(t)\}=[v(t)P(t)X'(t)]'+v(t)Q(t)X(t)$, 即

$$[v(t)P(t)X'(t)]'+v(t)Q(t)X(t)=0.\tag{31}$$

因此, 系统 (8) 等价于系统 (31). 所以, 基于系统 (31) 和关于系统 (1) 的振动准则: 定理 2.1–2.3, 我们能够建立关于系统 (8) 的振动判定定理.

定理 2.4 设 $H\in\mathscr{H}$ 和 $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$. 若存在 $c\in(a,b)\subset[t_0,\infty)$ 和在 $\mathscr{S}$ 上的单调泛函满足

$$\begin{aligned}&q\left[\frac{1}{H(c,a)}B^\rho\left(vQ;a,c\right)+\frac{1}{H(b,c)}A^\rho\left(vQ;c,b\right)\right]\\&\quad>q\left[\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{H(c,a)}B^\rho\left(v\left\{\lambda_1+\frac{\rho'}{\rho}\right\}^2P;a,c\right)+\frac{1}{H(b,c)}A^\rho\left(v\left\{\lambda_2-\frac{\rho'}{\rho}\right\}^2P;c,b\right)\right\}\right],\end{aligned}\tag{32}$$

其中 $v(t)=\exp\left\{\int_{t_0}^t r(s)ds\right\}$, 则对系统 (8) 的任意预备解 $X(t)$, $\det X(t)$ 在区间 (a,b) 上至少有一个零点.

定理 2.5 设 $H\in\mathscr{H}$ 和 $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$ 成立. 如果对每个 $T\geq t_0$, 存在 $a,b,c\in\mathbf{R}$, 使得 $T\leq a<c<b$ 和 (32) 式满足. 则系统 (8) 的任意预备解在 $[t_0,\infty)$ 上是振动的.

定理 2.6 设 $H\in\mathscr{H}_0$ 和 $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$. 如果对每个 $l\geq t_0$, 在 $\mathscr{S}$ 上存在单调泛函 q 和 $a,c\in\mathbf{R}$ 满足 $l\leq a<c$ 和

$$\begin{aligned}&q\left[\int_a^c H(s-a)\left\{(\rho v)(s)Q(s)+(\rho v)(2c-s)Q(2c-s)\right\}ds\right]\\&>q\Bigg[\frac{1}{4}\int_a^c H(s-a)\Bigg\{\left(\lambda(s-a)+\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}\right)^2(\rho vP)(s)\\&\quad+\left(\lambda(s-a)-\frac{\rho'(2c-s)}{\rho(2c-s)}\right)^2(\rho vP)(2c-s)\Bigg\}ds\Bigg],\end{aligned}\tag{33}$$

其中 $v(t)=\exp\left\{\int_{t_0}^t r(s)ds\right\}$, 则系统 (8) 的任意预备解在 $[t_0,\infty)$ 上是振动的.

注 1 设 $K,J\in\mathscr{S}$ 和 $J>0$. 如果在定理 2.5 和 2.6 中的 $q[K]$ 分别被非线性泛函 $\lambda_i[K+J]$ $(i=1,2,\ldots,n)$ 或 $\mathrm{tr}[K+E_n]$ 代替, 同时其它条件不变, 则系统 (8) 是振动的.

3 基于特征值函数和正线性泛函的进一步推论

本节考虑具有阻尼项的二阶自共轭矩阵微分系统 (8), 进一步刻画定理 2.5 和 2.6 的一些有趣的推论.

首先, 运用特征值函数给出振动判据. 下面的定理 3.1–3.3 不仅表明可以用最大特征值泛函判别振动性态, 而且也可以用每个特征值泛函来确定系统振动特性.

定理 3.1 设 $v(t)=\exp\{\int_{t_0}^t r(s)ds\}$. 如果对系统 (8) 的任意预备解 $X(t)$, 存在 $c\in(a,b)$, $H\in\mathscr{H}$ 和 $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$, 使得

$$\begin{aligned}&\lambda_i\left[\frac{1}{H(c,a)}B^\rho(vQ;a,c)+\frac{1}{H(b,c)}A^\rho(vQ;c,b)\right]\\&>\frac{1}{4}\lambda_i\left[\frac{1}{H(c,a)}B^\rho\left(v\left\{\lambda_1+\frac{\rho'}{\rho}\right\}^2P;a,c\right)+\frac{1}{H(b,c)}A^\rho\left(v\left\{\lambda_2-\frac{\rho'}{\rho}\right\}^2P;c,b\right)\right].\end{aligned}\tag{34}$$

则对系统 (8) 的任意预备解 $X(t)$, $\det X(t)$ 在区间 (a,b) 上至少有一个零点.

证明 根据定理 2.5 和引理 1.1, 可推出结论.

下面定理 3.2 可从定理 3.1 立得.

定理 3.2 设 $v(t)=\exp\{\int_{t_0}^t r(s)ds\}$. 如果对每个 $T\geq t_0$, 存在 $H\in\mathscr{H}$, $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$ 和 $a,b,c\in\mathbf{R}$, 使得 $T\leq a<c<b$ 及 (34) 式成立, 则系统 (8) 的任意预备解在 $[t_0,\infty)$ 上是振动的.

对 $\mathscr{H}$ 的子集 $\mathscr{H}_0$, 应用定理 3.2, 我们可得下列结果.

定理 3.3 设 $v(t)=\exp\left\{\int_{t_0}^t r(s)ds\right\}$. 设对每个 $l\geq t_0$, 存在 $H\in\mathscr{H}_0$, $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$ 和 $a,c\in\mathbf{R}$ $(l\leq a<c)$ 满足

$$\begin{aligned}&\lambda_i\left[\int_a^c H(s-a)\{(\rho v)(s)Q(s)+(\rho v)(2c-s)Q(2c-s)\}ds\right]\\&>\frac{1}{4}\lambda_i\Bigg[\int_a^c H(s-a)\Bigg\{(\rho v)(s)(\lambda(s-a)+\frac{\rho'(s)}{\rho(s)})^2P(s)\\&\quad+(\rho v)(2c-s)\left(\lambda(s-a)-\frac{\rho'(2c-s)}{\rho(2c-s)}\right)^2P(2c-s)\Bigg\}ds\Bigg],\end{aligned}\tag{35}$$

则系统 (8) 的任意预备解在 $[t_0,\infty)$ 上是振动的.

证明 根据定理 2.6 和引理 1.1, 可得系统 (8) 的任意预备解在 $[t_0,\infty)$ 上是振动的. 定理 3.3 证毕.

下面基于系统 (8) 在 $[t_0,\infty)$ 的子区间序列上的函数 P, r 和 Q 的特性, 利用正线性泛函和广义平均建立系统 (8) 的振动准则.

定理 3.4 设 $v(t)=\exp\{\int_{t_0}^t r(s)ds\}$. 如果存在 $c\in(a,b)$, $H\in\mathscr{H}$, $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$ 和正线性泛函 $\mathbf{L}$, 使得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{H(c,a)}\mathbf{L}\left[B^{\rho}\left(vQ;a,c\right)\right]+\frac{1}{H(b,c)}\mathbf{L}\left[A^{\rho}\left(vQ;c,b\right)\right]\\&\quad>\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{H(c,a)}\mathbf{L}\left[B^{\rho}\left(v\left\{\lambda_1+\frac{\rho'}{\rho}\right\}^2P;a,c\right)\right]+\frac{1}{H(b,c)}\mathbf{L}\left[A^{\rho}\left(v\left\{\lambda_2-\frac{\rho'}{\rho}\right\}^2P;c,b\right)\right]\right\},\end{aligned}\tag{36}$$

则对系统 (8) 的任意预备解 $X(t)$, $\det X(t)$ 在区间 (a,b) 上至少有一个零点.

证明 根据定理 2.5 和 $\mathbf{L}$ 的线性性, 可推出定理 3.4 结论.

下面的定理是将 Wong 的结果文 [19, 定理 1] 和 Zheng 的振动准则文 [20, 定理 1–3] 以及 Yan 文 [21, 定理 1], 从系统 (8) 的 $n=1$, $P(t)=1$ 情形推广改进到一般情形.

定理 3.5 设 $v(t)=\exp\{\int_{t_0}^t r(s)ds\}$. 如果对每个 $T\geq t_0$, 存在 $H\in\mathscr{H}$, $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$, 正线性泛函 $\mathbf{L}$ 和 a, b, $c\in\mathbf{R}$, 使得 $T\leq a<c<b$ 及 (36) 式成立, 则系统 (8) 的任意预备解在 $[t_0,\infty)$ 上是振动的.

对 $\mathscr{H}$ 的子集 $\mathscr{H}_0$, 应用定理 3.5, 我们可得下列结果.

定理 3.6 如果对每个 $l\geq t_0$, 存在 $H\in\mathscr{H}_0$, $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$, 正线性泛函 $\mathbf{L}$ 和 a, $c\in\mathbf{R}$, 使得 $l\leq a<c$ 和

$$\begin{aligned}&\int_a^c H(s-a)\left\{(\rho v)(s)\mathbf{L}\left[Q(s)\right]+(\rho v)(2c-s)\mathbf{L}\left[Q(2c-s)\right]\right\}ds\\&\quad>\frac{1}{4}\int_a^c H(s-a)\left\{(\rho v)(s)\left(\lambda(s-a)+\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}\right)^2\mathbf{L}\left[P(s)\right]\right.\\&\qquad\left.+(\rho v)(2c-s)\left(\lambda(s-a)-\frac{\rho'(2c-s)}{\rho(2c-s)}\right)^2\mathbf{L}\left[P(2c-s)\right]\right\}ds,\end{aligned}\tag{37}$$

其中 $v(t)=\exp\left\{\int_{t_0}^t r(s)ds\right\}$, 则系统 (8) 的任意预备解在 $[t_0,\infty)$ 上是振动的.

在$\mathbf{L}$是线性的假设下, 定理 3.6 的证明类似定理 2.3 的证明即可得.

下面我们进一步描述定理 3.5 的一些推论.

推论 3.1 设 $v(t)=\exp\{\int_{t_0}^t r(s)ds\}$. 如果对每个 $l\geq t_0$, 存在 $H\in\mathscr{H}$, $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$ 和正线性泛函 $\mathbf{L}$, 使得

$$\limsup_{t\to\infty}\mathbf{L}\left[A^{\rho}\left(vQ-\frac{1}{4}v\left\{\lambda_2-\frac{\rho'}{\rho}\right\}^2P;l,t\right)\right]>0\tag{38}$$

和

$$\limsup_{t\to\infty}\mathbf{L}\left[B^{\rho}\left(vQ-\frac{1}{4}v\left\{\lambda_1+\frac{\rho'}{\rho}\right\}^2P;l,t\right)\right]>0,\tag{39}$$

则系统 (8) 的任意预备解在 $[t_0,\infty)$ 上是振动的.

证明 对任意 $T\geq t_0$, 令 $a=T$. 在 (38) 式中选取 $l=a$, 则存在 $c>a$, 使得

$$\mathbf{L}\left[A^{\rho}\left(vQ-\frac{1}{4}v\left\{\lambda_2-\frac{\rho'}{\rho}\right\}^2P;a,c\right)\right]>0.\tag{40}$$

在 (39) 式中选取 $l=c$, 则存在 $b>c$, 使得

$$\mathbf{L}\left[B^{\rho}\left(vQ-\frac{1}{4}v\left\{\lambda_1+\frac{\rho'}{\rho}\right\}^2P;c,b\right)\right]>0.\tag{41}$$

结合 (40) 和 (41) 式可得 (36) 式. 由定理 3.5 推出推论 3.1 的结论.

类似地, 我们可证:

推论 3.2 如果推论 3.1 中的条件 (38) 和 (39) 分别被下列条件代替

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,l)}\mathbf{L}\left[A^{\rho}\left(vQ-\frac{1}{4}v\left\{\lambda_2-\frac{\rho'}{\rho}\right\}^2 P;l,t\right)\right]>0 \tag{42}$$

和

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,l)}\mathbf{L}\left[B^{\rho}\left(vQ-\frac{1}{4}v\left\{\lambda_1+\frac{\rho'}{\rho}\right\}^2 P;l,t\right)\right]>0, \tag{43}$$

且其他条件不变, 则系统 (8) 的任意预备解在 $[t_0,\infty)$ 上是振动的.

对 $\mathscr{H}$ 的子集 $\mathscr{H}_0$, 应用推论 3.1, 我们可得下列结果.

推论 3.3 设 $v(t)=\exp\{\int_{t_0}^t r(s)ds\}$. 如果对每个 $l\ge t_0$, 存在 $H\in\mathscr{H}_0$, $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$ 和正线性泛函 $\mathbf{L}$, 使得

$$\limsup_{t\to\infty}\int_l^t(\rho v)(s)H(s-l)\left(\mathbf{L}\left[Q(s)\right]-\frac{1}{4}\left\{\lambda(s-l)+\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}\right\}^2\mathbf{L}\left[P(s)\right]\right)ds>0 \tag{44}$$

和

$$\limsup_{t\to\infty}\int_l^t(\rho v)(s)H(t-s)\left(\mathbf{L}\left[Q(s)\right]-\frac{1}{4}\left\{\lambda(t-s)-\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}\right\}^2\mathbf{L}\left[P(s)\right]\right)ds>0. \tag{45}$$

则系统 (8) 的任意预备解在 $[t_0,\infty)$ 上是振动的.

注 2 通过适当选取如前面所描述的单调泛函和函数 $\rho(t)$ 与 $H(t,s)$, 如选取 $\rho(t)=1,t$ 等, 根据第二节, 第三节的结果, 可得系统 (1) 或 (8) 不同的准确的振动充分条件.

现给出一个实例说明本文结果. 在下列例子中, 定理 3.6 可以应用而定理 2.3 不能.

例 3.1 设 b 是一个常数, 考虑具有阻尼项的二阶自共轭矩阵微分系统 (8), 其中

$$P(t)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad r(t)=\cos t,\quad Q(t)=\begin{bmatrix}1+\sin t&0\\0&b-\sin t\end{bmatrix},\quad t\ge 0. \tag{46}$$

对任意 $l>0$, 存在 $n\in N_0$, 使得 $2n\pi>0$. 取 $a=2n\pi$, $c=2(n+1)\pi+\frac{\pi}{2}$ 和 $\rho(t)=1$. 在定理 3.6 中选取 $H(t-s)=(t-s)^2$, 则 $\lambda(s-a)=2$. 易知 $v(t)=\exp\left\{\int_0^t r(s)ds\right\}=\exp\left\{\int_0^t\cos sds\right\}=\exp\{\sin t\}$, 且 (37) 式变为

$$\begin{aligned}&\int_a^c(s-a)^2\left(\exp\left\{\int_0^s r(u)du\right\}\mathbf{L}[Q(s)]+\exp\left\{\int_0^{2c-s}r(u)du\right\}\mathbf{L}[Q(2c-s)]\right)ds\\&\quad>\int_a^c(s-a)^2\left(\exp\left\{\int_0^s r(u)du\right\}\mathbf{L}[P(s)]+\exp\left\{\int_0^{2c-s}r(u)du\right\}\mathbf{L}[P(2c-s)]\right)ds.\end{aligned}$$

定义 $\mathbf{L}[R]=r_{11}$ 其中 $R=(r_{ij})\in\mathscr{S}$, 经简单计算得 $Q(2c-s)=Q(s)$,

$$\begin{aligned}&\int_a^c(s-a)^2\left(\exp\left\{\int_0^s r(u)du\right\}\mathbf{L}[Q(s)]+\exp\left\{\int_0^{2c-s}r(u)du\right\}\mathbf{L}[Q(2c-s)]\right)ds\\&\quad=2\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi+\frac{\pi}{2}}(s-2n\pi)^2(1+\sin s)\exp\{\sin s\}ds=2\int_0^{\frac{5\pi}{2}}s^2(1+\sin s)\exp\{\sin s\}ds\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&\int_a^c(s-a)^2\left(\exp\left\{\int_0^s r(u)du\right\}\mathbf{L}[P(s)]+\exp\left\{\int_0^{2c-s}r(u)du\right\}\mathbf{L}[P(2c-s)]\right)ds\\&\quad=2\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi+\frac{\pi}{2}}(s-2n\pi)^2\exp\{\sin s\}ds=2\int_0^{\frac{5\pi}{2}}s^2\exp\{\sin s\}ds.\end{aligned}$$

由

$$\int_0^{\frac{5\pi}{2}} s^2 \sin s \exp\{\sin s\} ds > 0$$

知 (37) 式成立. 然后根据定理 3.6, 具有系数 (46) 的系统 (8) 是振动的.

然而, 如果选取 $\mathbf{L}[R] = \mathrm{tr}R$ 和 $b = -1$, 则 $\mathrm{tr}Q(t) = 0$. 在这中情形, 具有系数 (46) 的系统 (8) 仍然是振动的. 进一步, 若 $b = 0$, 则具有系数 (46) 的系统 (8) 等价于下列对应的标量系统

$$x'' + (\cos t)x' + (1 + \sin t)x = 0, \tag{47}$$

$$x'' + (\cos t)x' - (\sin t)x = 0. \tag{48}$$

由上面的讨论易知 (47) 式是振动. 但是 (48) 式有一个非振动解 $x(t) = \exp\{-\sin t\}$. 同时此例的振动不能由文 [1–22] 中的已知结果判别.

致谢 感谢唐云教授和 James S. W. Wong 教授的关心.

参 考 文 献

[1] Butler G. J., Erbe L. H., Mingarelli A. B., Riccati techniques and variational principle in oscillatory theory for linear system, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1987, **303**: 263–282.
[2] Byers R., Harris B. J., Kwong M. K., Weighted means and oscillation of second order matrix differential system, *J. Diff. Eqs.*, 1986, **61**: 164–177.
[3] Coles W. J., Oscillation for self-adjoint second order matrix differential equations, *Diff. Integral Equations*, 1991, **4**: 195–204.
[4] Erbe L. H., Kong Q., Ruan S., Kamenev type theorems for second order matrix differential systems, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1993, **117**: 957–962.
[5] Etgen G. J., Pawlowski J. F., Oscillation criteria for second order self adjoint matrix differential systems, *Pacific J. Math.*, 1976, **66**: 99–110.
[6] Hinton D. B., Leiw R. T., Oscillation theory of gneralized second order differential equations, *Rocky Mountain J. Math.*, 1980, **10**: 751–766.
[7] Kong Q., Oscillation of Second Order Matrix Differential Equations, *Diff. Eqs. Dyn. Sys.*, 2000, **8**: 99–110.
[8] Meng F., Wang J., Zheng Z., A note on Kamenev type theorem for second order matrix differential systems, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1998, **126**: 391–395.
[9] Wang Q., Oscillation criteria for second order matrix differential systems, *Arch. Math.*, 2001, **76**: 385–390.
[10] Yang Q. G., Interval oscillation criteria for second order self-adjoint matrix differential systems with damping, *Ann. Polonici Math.,* 2002, **LXXIX**: 185–198.
[11] Yang Q. G., Oscillation theorems for second order linear self-adjoint matrix differential systems with damping, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2005, **21**(1): 17–30.
[12] Wang Q., Interval criteria for oscillation of certain matrix differential systems, *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, **276**: 373–395.
[13] Yang X. J., Oscillation criteria for certain second order matrix differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, **265**: 285–295.
[14] Zhuang R. K., Interval criteria for second order matrix differential systems, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2001, **44**(6): 1037–1044.
[15] Kumari I. S., Umamaheswaram S., Oscillation criteria for linear matrix Hamiltonian system, *J. Diff. Eqs.*, 2000, **165**: 165–174.
[16] Yang Q. G., Mathsen R., Zhu S. M., Oscillation theorems for self-adjoint matrix Hamiltonian systems, *J. Diff. Eqs.*, 2003, **190**: 306–329.
[17] Kong Q., Interval criteria for oscillation of second-order linear differential equation, *J. Math. Anal. Appl.*, 1999, **229**: 258–270.
[18] Li W., Agarwal R. P., Interval oscillation criteria for second-order nonlinear differential equation with damping, *Computers and Math. Appl.*, 2000, **40**: 217–230.
[19] Wong J. S. W., On Kamenev-type oscillation theorems for second order differential equations with damping, *J. Math. Anal. Appl.*, 2001, **258**: 244–257.
[20] Zheng Z., Note on Wong's paper, *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, **274**: 466–473.
[21] Yan J., Oscillation theorems for second order linear differential equation with damping, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1986, **98**: 276–282.
[22] Kamenev I. V., An integral criteria for oscillation of linear differential equations, *Mat. Zametki.*, 1978, **23**: 249–251.